Enseignant : Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
19 avril 2024
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 3 (énoncé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 30 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, -1)\,,\ v_2 = (2, -1, 1)\,,\ v_3 = (3, 3, 1)\,,\ v_4 = (8, 5, 3)\,,\ v_5 = (4, -2, 2)\,,$$

On sait aussi que la famille $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (pas nécessaire de le vérifier).

Question 1 (2 points) Sélectionner l'équation (ou les équations) qui décri(ven)t le sous-espace vectoriel suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{Vect}(3v_2 - 2v_3, v_4 - 2v_5)\,.$$

- ☐ $y = 9z$
- ☐ $x = 0,\ \frac{y}{9} = -z$
- ☐ $x = 0,\ 9y = -z$
- ☐ $y + 9z = 0$

Question 2 (2 points) Quel est le coefficient de v_1 dans la décomposition de v_4 sur $\mathcal{B}$?

- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 0
- ☐ 1

Question 3 (2 points) Laquelle des familles ci-dessous est une base de $\mathbb{R}^3$?

- ☐ v_1, v_2, v_5
- ☐ v_2, v_3, v_4
- ☐ v_1, v_3, v_4
- ☐ v_3, v_4, v_5

Pour les **Questions 4, 5 et 6** on donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (x + 5y + 6z, 2x + 10y + 12z, (3\alpha - 5)x + (\alpha + 3)y + (4\alpha - 2)z)\,.$$

Question 4 (2 points) Pour combien de valeur(s) de α l'application f est-elle de rang 1 ?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ une infinité

Question 5 (2 points) Pour combien de valeur(s) de α a-t-on $(7, 14, -23) \in \mathrm{Im}\, f$?

☐ 1 ☐ 0 ☐ une infinité ☐ 2

Question 6 (3 points) Pour combien de valeur(s) de α peut-on trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $[f]_{\mathcal{B}}$ a sa première colonne et sa dernière ligne nulle, c'est-à-dire qu'elle est de la forme :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

☐ 0 ☐ une infinité ☐ 1 ☐ 2

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,,\; (x, y, z) \to (x + 7y - 2z, -x - 2y + z, -3x + 4y + z)$$

(a) Donner la matrice A de f en base canonique. Quel est le déterminant de A ?

(b) Déterminer une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer une base de $\mathbf{Ker}\, f$ et une équation de $\mathbf{Im}\, f$.

(d) Pour tout $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, décrire l'ensemble $f^{-1}(\{w\})$ des antécédents de w par f.

Question 8: *Cette question est notée sur 7 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7

On note $\mathcal{B}_{\mathbf{can}}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne aussi l'application linéaire :

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \to (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}, -\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{6}\boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z}, \mathbf{6}\boldsymbol{x} - \mathbf{9}\boldsymbol{y} + \mathbf{3}\boldsymbol{z}) \, .$$

Dans chacun des cas suivants, dire s'il existe une base :

$$\mathcal{B} = \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$$

de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la condition donnée. Si vous pensez qu'une telle base existe, donnez-en un exemple et justifiez brièvement. Sinon, expliquez pourquoi il n'en existe pas.

(a) $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $[f]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

A noter que les trois parties (a), (b) et (c) sont donc **indépendantes**.